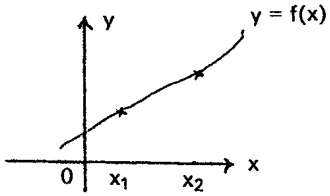
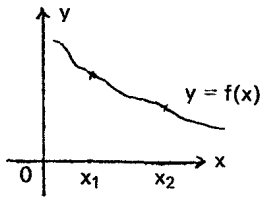
单元 A2：函数

特定目标：

1. 将函数作为学习其它数学单元的基本工具。
2. 绘画及描述不同的函数。

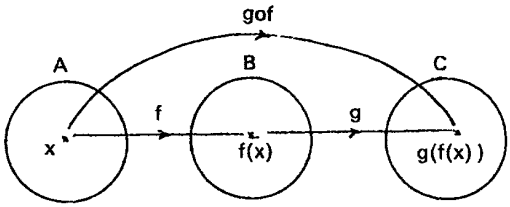
内容	时间分配	教学建议
2.1 函数及其图像	2	应教导学生认识清楚函数的定义，但函数的严格定义可不需深究，并可采用下列方式来说明函数的定义： $f: A \to B$，f 为一由 A 至 B 的函数
2.2 函数的性质及运算	4	假若 A 集中的每一元素均以某种方式匹配 B 集的唯一元素。A 集称为 f 的定义域，B 集称为 f 的值域。因函数 f 关系而对应于A集中元素 x 的 B集元素，通常用 f(x)表示，并称为 x 在函数 f 下的像。f[A]则称为 A 集在函数 f 下的像点集。在此，真值函数的意义须特别强调，因为它们在本课程的其它单元中有广泛使用，学生并须懂得如何绘画函数的图像。 学生应该清楚知道内射、满射和对射函数的定义，并能将它们分辨和将它们应用于解答有关问题。教师可采用下列提供的方法： 函数 $f: A \to B$ 为 (i) 内射(一个对一个)若且仅若对集 A 中的元素 a_1、a_2，$a_1 \neq a_2$ 蕴涵 $f(a_1) \neq f(a_2)$，或者等价地，$f(a_1) = f(a_2)$ 蕴涵 $a_1 = a_2$； (ii) 满射若且仅若 $f[A] = B$； (B 集之中的每一元素均为 A 集之中某一元素的像点。) (iii) 对射(一一对应)若且仅若 f 为一内射和满射函数。 此时，教师应该已替学生在反函数 f^{-1} 的定义做好了预备，并可以推论出下列性质： f 为一对射函数若且仅若其反函数 f^{-1} 存在。 再者，函数与其反函数(如存在的话) 的图像仅为直线 $y = x$ 上的反射。这个性质应利用足够的例子来加以说明。

13

内容	时间分配	教学建议
		学生应懂得分辨奇函数、偶函数、周期函数、递增和递减函数。对于这些函数，应给予学生清楚的定义。至于递增和递减函数的定义，在未曾学习微分法之前，可采纳以下提供的定义： (i) f(x) 为一递增函数(严格递增)若且仅若 $x_2 > x_1$ 蕴涵 $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($(f(x_2) > f(x_1))$； (ii) f(x) 为一递减函数(严格递减)若且仅若 $x_2 > x_1$ 蕴涵 $f(x_2) \leq f(x_1)$ ($(f(x_2) < f(x_1))$。  f(x) 是严格递增  f(x) 是严格递减 这些性质对绘画曲线和计算定积分均甚为有用。 对于函数的运算，教师应与学生讨论下列各点：设 f、g 为函数，则 f +g、f –g、f × g 及 f/g (在考虑范围下的所有 x，$g(x) \neq 0$) 均为函数。 至于复合函数，因为它们在微分学中对学习链式法则极为重要，故需要给予学生足够的例子，以便他们能够掌握复合函数的概念。教师可引用以下例子，并列举其它真值函数的例子作为解释。 若函数 $f: A \to B$ 及 $g: B \to C$ 则 f 与 g 的复合函数为 $g \circ f: A \to C$ 及对 A 集内所有元素 x，$g \circ f(x) = g(f(x))$。

14

内容	时间分配	教学建议



2.3	**代数函数**	2	学生应对下列的代数函数有所认识： (*a*) 多项式函数； (*b*) 有理函数 ； (*c*) 幂函数 x^{α}，其中α 为有理数； (*d*) 由上述各函数的加、减、乘、除和复合而成的其它代数函数、例如 $\sqrt{x^2+1}$。
2.4	**三角函数及其公式**	14	学生应懂得绘画六个三角函数及其反函数的图像。下列有关三角函数的基本关系应与学生详细讨论： $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$ $\cot^2\theta+1=\mathrm{cosec}^2\theta$ 学生并应懂得三角函数在 $(\frac{n\pi}{2}\pm\theta)$时的化简 (当 n 为奇数或偶数)。其余有关的应用和公式亦应一并教授。 (1) 复角公式 $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$ $\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$ $\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$

内容	时间分配	教学建议
		(2) 倍角公式 $\sin 2A=2\sin A\cos A$ $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$ $=2\cos^2 A-1$ $=1-2\sin^2 A$ $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$ $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$ $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$ (3) 半角公式 $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)$ $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)$ $\sin A=\frac{2t}{1+t^2}$ ；$\cos A=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ 其中 $t\equiv\tan\frac{A}{2}$ (4) 和及积公式 $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

内容	时间分配	教学建议

17 **2.5 指数函数及对数函数**	6	$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$ $\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$ $\cos A\sin B = \frac{1}{2}(\sin(A+B)-\sin(A-B))$ $\cos A\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))$ $\sin A\sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))$ 其实；大部份公式均为基本定义的引申，故此教师应鼓励学生将它们证明出来，并讨论将数式 $a\cos x + b\sin x$ 转变为 $r\sin(x+\alpha)$ 或 $r\cos(x+\beta)$的方法。将上述各个公式应用在恒等式的证明和计算三角方程式的解亦应包括在课程内。 学生应对指数函数和对数函数之间互为反函数的关系有所认识。对数的定义需加以温习： $\log_a x = y$ 若且仅若 $x = a^y$ 其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$。 对于包含有变量 x 的对数函数，学生应知道它们其实祇是 $\log x$ 或函数 f(x)的对数函数而已。例如：$(\log_{10} x)^2$ 和 $\log_e(1+\tan x)$ 等。 对数函数的一些特性应加以学习。 设 $f(x) = \log_a x$，其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$； (i) f(x) 只在 $x > 0$ 上能够定义； (ii) 当 $a > 1$ 时，f(x)是一递增函数，而当 $0 < a < 1$ 时，f(x)是一递减函数； (iii) 当 b、$c > 0$ 及 $b \neq 1$，$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$； (iv) $f(a) = \log_a a = 1$； (v) $f(1) = \log_a 1 = 0$。

内容	时间分配	教学建议
18		对于指数函数，应教导学生相应的处理方法。设 a 为一正常数和 x 为一变量，则函数 a^x 为一指数函数。其特性为： 设 $f(x) = a^x$ 其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$， (i) f(x) 对所有实数均可定义； (ii) 当 $a > 1$ 时，f(x)为递增函数而当 $0 < a < 1$，f(x)则为递减函数； (iii) $f(0) = a^0 = 1$。 学生应懂得绘画下列图像： (i) 对数函数 $f(x) = \log_a x$ 当 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ (ii) 指数函数 当 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 在此时，教师可引领学生去扩阔他们在对数函数和指数函数的认识。 (i) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (ii) $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ 和 (iii) $\log_e x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$。 〔请注意 (iii) 仅为对数函数的另一定义而已，$\log_e x$ 可写为 $\ell n\, x$〕 对数函数和指数函数的性质应予讨论。 对数函数 $f(x) = \log_a x$ 其中 $a > 0$，$a \neq 1$， (i) $f(x) + f(y) = f(xy)$ (ii) $f(x) - f(y) = f(\frac{x}{y})$ (iii) $f(x^n) = nf(x)$

内容	时间分配	教学建议
	28	指数函数 $g(x) = a^x$ 其中 $a > 0$ (i) $g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$ (ii) $g(x - y) = \frac{g(x)}{g(y)}$ (iii) $g(nx) = (g(x))^n$ 至于函数 e^x 和 $\ell n\ x$ 在学习数学时的重要性应加以指出。