单元 B1：序列、级数及其极限

特定目标：

1. 学习序列和级数的概念。
2. 认识序列和级数的极限的直观概念。
3. 认识无穷序列和无穷级数的特性。

内容	时间分配	教学建议
1.1 序列及级数	6	序列和级数的概念应该清楚地提出。下列的介绍方法可供参考： 若 a_n 为对应正整数 n 可定义的函数，其数值 a_1，a_2，a_3，…a_n，…则可组合成一序列。至于该序列为有限或无限则须视乎项数是有限或无限。再者，$a_1+a_2+...+a_n+...$ 则称为级数。至于该级数为有限或无限必须视乎其所包括的数目而定。下列为常用记法： $S_n=\sum_{r=1}^{n}a_r$ 或 $\sum_{1}^{n}a_r$ 有关序列和级数的简易运算及法则应予介绍。为方便起见，序列 a_1，a_2，a_3，…和 b_1，b_2，b_3…可用$\{a_i\}$和$\{b_i\}$表示，则 (i) $\{a_i\}\pm\{b_i\}=\{a_i\pm b_i\}$ (ii) $\lambda\{a_i\}=\{\lambda a_i\}$ 亦即，可涉及项与项之间的运算概念。 对级数求和法，可参考下列方法： (1) 数学归纳法：本课程中单元 A3 已有提及。 (2) 求差方法：教师应强调级数中第 r 项可写为 f(r + 1)及 f(r)之差，其中 f(x)为 x 的函数。即 若 $a_r=f(r+1)-f(r)$ 则 $\sum_{1}^{n}a_r=\sum_{1}^{n}[f(r+1)-f(r)]$ $=f(n+1)-f(1)$ $\sum_{1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ 及 $\sum_{1}^{n}r(r+1)$ 就是其中一些典型例子。

48

内容	时间分配	教学建议
1.2 序列及级数的极限	7	若级数的项是可以用下列递推关系表达的话： $a_r-a_{r-1}=f(r)$ 或 $a_r=Aa_{r-1}+Ba_{r-2}$ 以下是找出 a_r 的解的方法：(特别适用于后者) 设α、β为辅助方程 $\lambda^2=A\lambda+B$ 的根， (i) 若$\alpha\neq\beta$，则 $a_r=k_1\alpha^r+k_2\beta^r$ (ii) 若$\alpha=\beta$，则 $a_r=(k_1+rk_2)\alpha^r$ 其中 k_1 和 k_2 为待定常数。 序列的极限概念应以直观方式教授，下列方式可作参考： 设 a_1，a_2，…，a_n，…为一序列，对一任意大的数值 n，则 a_n 与一常数 ℓ 的差为一任意小的正数，我们亦可以写为 当 $n\to\infty$ 时 $a_n\to\ell$，或 $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$。 教师应同时强调下列各点： (i) ℓ 称为该序列的极限。 (ii) 若极限 ℓ 是存在的话，则必是唯一的极限。 (iii) 该序列在 ℓ 收敛，或该收敛序列的极限为 ℓ。 (iv) 若一序列并不收敛于任何极限，则称为发散序列。 并应提供充足的收敛和发散序列的例子以作说明。此等例子如下： (1) $\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$，其中 a > 0。 (2) 序列 $a_n=\frac{\sin\frac{1}{2}n\pi}{n}$ 收敛于极限 0。 (3) 发散序列 $a_n=\{1+(-1)^n\}\sqrt{n}$。 (4) 振动发散序列 $a_n=(-1)^n(1+\frac{1}{n})$。

49

内容	时间分配	教学建议
		注意：序列可分为收敛，发散(至 $+\infty$ 或 $-\infty$)或振动（并不收敛或发散至 $+\infty$ 或 $-\infty$ ）不同类别。 收敛序列的一般性质亦应与学生讨论： 设 a_1，a_2，a_3，…，a_n，… 和 b_1，b_2，b_3，…，b_n，…为收敛序列，其极限分别为 a 和 b，则下列序列亦具收敛性质。 (i) λa_1，λa_2，λa_3，…. 收敛于 λa，其中 λ 为一常数。 (ii) a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3，… 收敛于 $a+b$ 。 (iii) a_1b_1，a_2b_2，a_3b_3，…收敛于 ab。 (iv) $\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\frac{a_3}{b_3}$，…收敛 $\frac{a}{b}$，假若 $b\neq 0$。 最后学生应在老师指导下认识到下列因果关系： (i) 设收敛序列 a_1，a_2，a_3，…的极限为 a， 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，其中 k 为一正整数。 (ii) 设 a_1，a_2，a_3，…和 b_1，b_2，b_3，…为两收敛序列，其极限同为 ℓ；而若另一序列 c_1，c_2，c_3，…，其中当 $i>k$，k 为一正整数，$a_i\le c_i\le b_i$，则 c_1，c_2，c_3，…亦为收敛，而且其极限亦是 ℓ。该性质通常称为迫近定理，教师可将单调序列和有界序列加以介绍，以便扩阔学生对序列的认识。 至于无穷级数方面，教师可用类似如下的处理方法： (1) 收敛概念 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1}^{n} u_i = S$ 存在，则级数 $u_1+u_2+u_3+\ldots$为收敛，并且可称 S 为级数的总和。若用 S 表示 $u_1+u_2+\ldots+u_n$，则其结果可写成为： 当 $n\to\infty$ 时，$S_n\to S$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ($S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ 通常称为第 n 个的部份和）在类似情况下，教师可选择引入发散和振动的概念。

内容	时间分配	教学建议
		(2) 收敛级数的性质 若 $u_1+u_2+u_3+\ldots$的极限为 S 和 $v_1+v_2+v_3+\ldots$的极限为 S’ 则 (a) $\lambda u_1+\lambda u_2+\lambda u_3+\ldots$收敛于 λS， λ 为一常数； (b) $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots\ldots$收敛于 $S+S'$； (c) 若 $u_1+u_2+u_3+\ldots$收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。
1.3 序列及级数的收敛性	5	介绍收敛序列的特性，如 (i) 收敛序列为有界 (ii) 单调而有界的序列为收敛 此外，一些典型的收敛序列和发散序列亦应加以讨论，并以下列之实例说明计算序列极限的方法。 (A) 收敛序列 (i) $a_n = x^n$，设 $\lvert x\rvert<1$ (ii) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (iii) $a_n = \frac{x^n}{n!}$ (B) 收敛级数 (i) $r+r^2+r^3+\ldots$，设 $\lvert r\rvert<1$ (ii) $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$ (iii) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ (iv) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

内容	时间分配	教学建议
		(C) 发散级数 (i) $\Sigma \frac{1}{n}$ (ii) $\Sigma (1-\frac{1}{n})^n$ (iii) $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ 此方法应包括迫近定理的典型应用例题，但毋须对收敛性的测试再作深究。
	18	