單元 A9：二元及三元綫性方程組

特定目標：

1. 利用高斯消去法解綫性方程組。
2. 認識解的存在性及唯一性。

內容	時間分配	教學建議
9.1 高斯消去法及梯陣式	5	適合下列兩個性質的矩陣稱爲梯陣式： (1) 首 k 行非零；其餘各行爲零。 (2) 每一非零行的第一個非零元素爲 1，並出現在前一行第一個非零元素的右列。 *例*： 以下 5×8 矩陣是梯陣式： $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 學生應懂得利用高斯消去法解二元及三元的綫性方程組，方法就是利用行的基本運算將一矩陣變爲梯陣式。 *例*： 解方程組 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \\ 4x_1-3x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+2x_3=4 \end{cases}$ 增廣矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

內容	時間分配	教學建議
9.2 解的存在性及唯一性	5	原方程組與下列方程組等價 $\begin{cases} x_1 \qquad -x_3=0 \\ \qquad x_2+x_3=1 \\ \qquad\qquad x_3=1 \end{cases}$ 由此可得 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=1$。 學生應知道二元或三元綫性方程組的解的存在性及唯一性條件。 對於二元綫性方程組： $a_1x+b_1y=d_1$ $a_2x+b_2y=d_2$ (i) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\neq 0$，方程組有唯一解。 幾何上，方程組代表一對相交的直綫。 (ii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix}\neq 0$， 方程組無解。幾何上，方程組代表一對平行（而不重合）的直綫。 (iii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix}=0$， 方程組有無窮多解。幾何上，方程組代表一對重合的直綫 教師應與學生討論一些如下列的三元方程組例子。當學生掌握了三維坐標幾何的意義後，其幾何解釋可加以討論。 (i) 在解方程組 $\begin{cases} 2x+y-z=7 \\ 5x-4y+7z=1 \\ 7x-3y+6z=8 \end{cases}$ 時， 明顯地第三式是多餘的。教師可與學生討論求得解 $x=\dfrac{29-3\lambda}{13}$，$y=\dfrac{33+19\lambda}{13}$，$z=\lambda$ 的方法，其中 λ 是任意數。

內容	時間分配	教學建議
		（ii） 解不一致方程組如 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-3y+2z=1 \\ 3x-2y+3z=7 \end{cases}$ 。 循此路向，可以更抽象形式表示三元綫性方程組的解的存在性及唯一性條件。
	10	